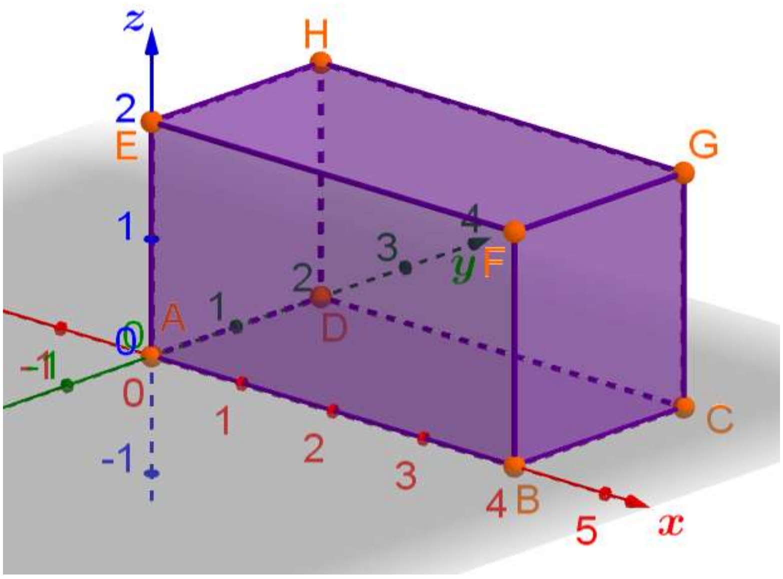
Géométrie dans l'espace

1. Se repérer dans l'espace

Exemple :



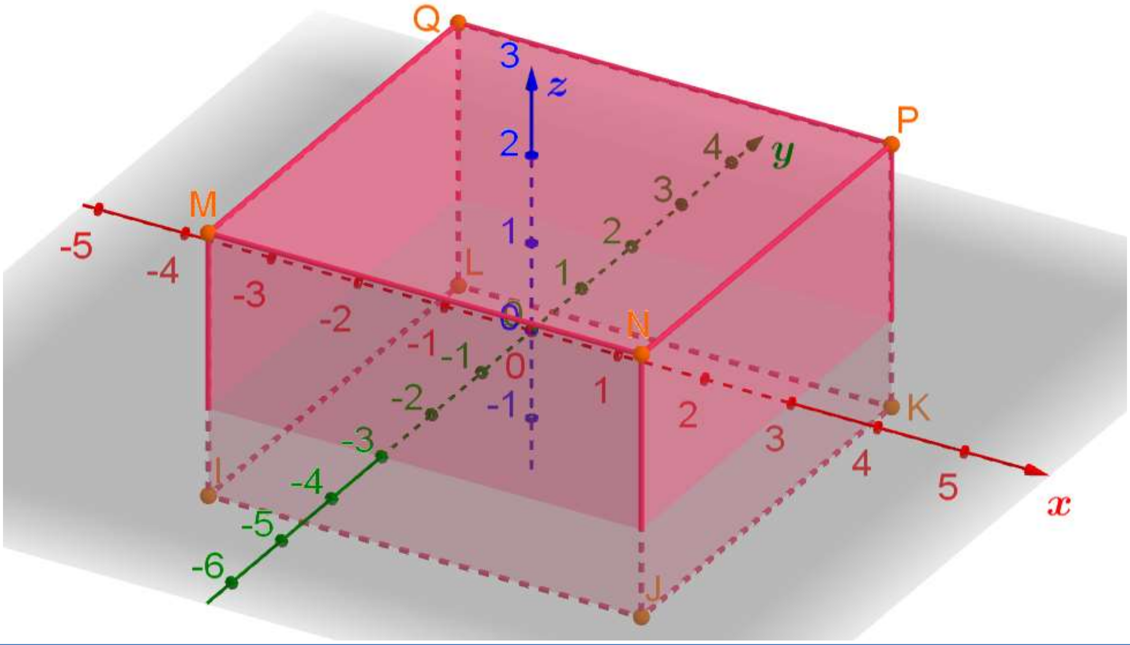
Pour repérer un point dans l'espace il faut trois coordonnées : son abscisse x, son ordonnée y et son altitude z (ou cote z)

Les coordonnées du point A sont $(\mathbf{0}\,;\mathbf{0}\,;\mathbf{0})$.

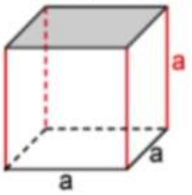
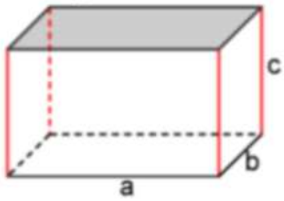
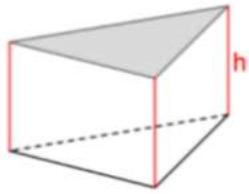
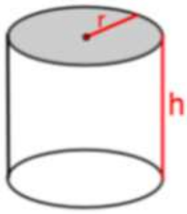
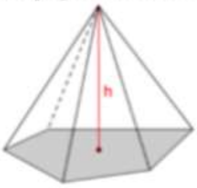
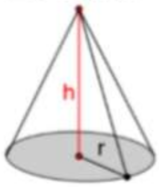
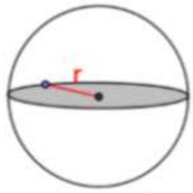
Les coordonnées du points C sont $(\mathbf{4}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{0})$.

Les coordonnées du points G sont $(\mathbf{4}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{2})$.

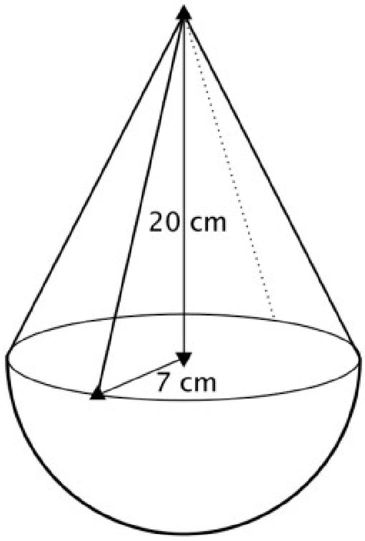
Exercice 1 : On considère le parallélépipède rectangle suivant dans lequel on sait que les coordonnées du point I sont $(-2\,;\,-3\,;\,-1)$ et les coordonnées du point P sont $(3\,;3\,;2)$.



2. Volume de solides

<table>
<tr>
<td>Le cube

$Volume = a \times a \times a = a^3$</td>
<td>Le pavé droit

$Volume = a \times b \times c$</td>
<td>Le prisme

$Volume = aire\ base \times h$</td>
<td>Le cylindre

$Volume = \pi \times r^2 \times h$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">La pyramide

$Volume = \dfrac{Aire\ base \times h}{3}$</td>
<td>Le cône

$Volume = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$</td>
<td>La sphère

$Volume = \dfrac{4}{3}\pi r^3$</td>
</tr>
</table>

Exemple : Le jouet ci-contre est un jouet pour enfant qui oscille sur une base sphérique de rayon 7 cm. Il a la forme d'une demi boule surmontée d'un cône de révolution de hauteur 20 cm.
Calculons sont volume exacte, puis on arrondira au cm^3.



Nous allons calculer séparément le volume du cône et de la demi-sphère.

- Volume du cône :

$$V_{cône} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$
$$V_{cône} = \frac{\pi \times 7^2 \times 20}{3}$$
$$V_{cône} = \frac{980\pi}{3}$$

Le volume du cône est $\frac{980\pi}{3}$ cm^3.

- Volume de la demi-sphère :
Commençons par calculer le volume de la sphère entière, on le divisera par 2 par la suite.

$$V_{sphère} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$
$$V_{sphère} = \frac{4}{3} \times \pi \times 7^3$$
$$V_{sphère} = \frac{1372\pi}{3}$$

Il reste maintenant à diviser ce nombre par 2 :

$$V_{demi-sphère} = \frac{\frac{1372\pi}{3}}{2} = \frac{1372\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1372\pi}{6} = \frac{686\pi}{3}$$

Le volume de la demi-sphère est donc $\frac{686\pi}{3}$.

- Volume du jouet :

  Il reste à ajouter les deux volumes précédents :

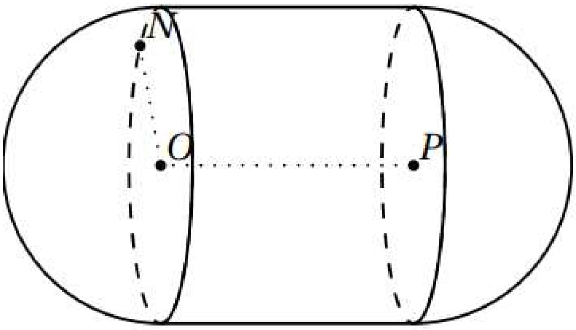
$$V_{jouet} = V_{cône} + V_{demi-sphère} = \frac{980\pi}{3} + \frac{686\pi}{3} = \frac{980\pi + 686\pi}{3} = \frac{1666\pi}{3}$$

  Le volume exact du jouet est donc $\boxed{\frac{1666\pi}{3} \text{ cm}^3}$.

  Or $\frac{1666\pi}{3} \simeq 1745$.

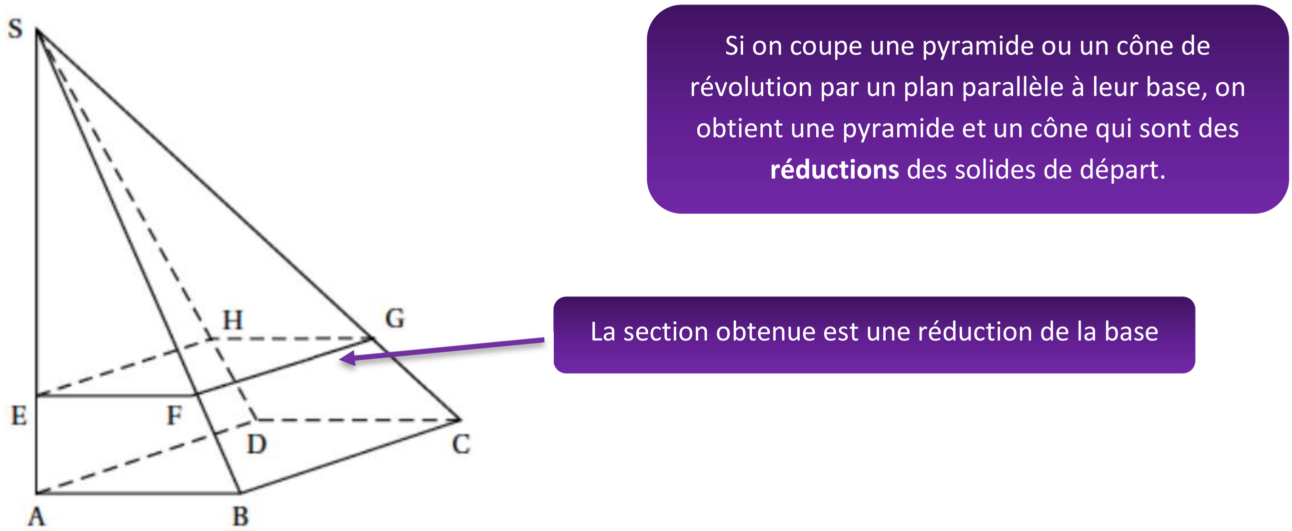
  Une valeur approchée du volume est donc $\boxed{1745 \text{ cm}^3}$.

Exercice 2 : Calcule le volume du solide ci-dessous sachant que $OP = 5$ mm et $ON = 2$ mm. (on donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée au mm^3)



3. Sections planes de solides

Exemple : Sur la pyramide SABCD à base rectangulaire suivante on a :
$SA = 15$ cm ; $AB = 8$ cm ; $BC = 11$ cm.



On a coupé cette pyramide par un plan EFGH parallèle
à la base ABCD et tel que $SE = 12$ cm.

Le rapport de réduction est donc $\frac{SE}{SA} = \frac{12}{15}$

Sachant maintenant que $SB = 17$ cm, calculons la valeur de SF :
On doit avoir :

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}$$

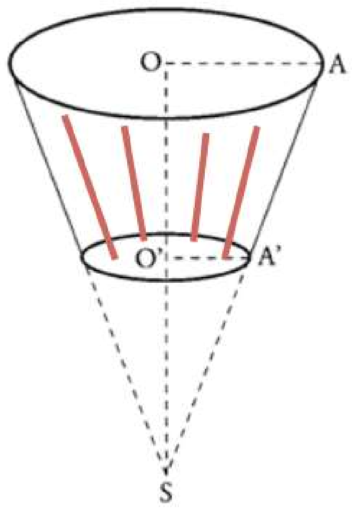
Ce qui donne :

$$\frac{12}{15} = \frac{SF}{17}$$

Le produit en croix des fractions nous donne alors :

$$SF = \frac{12 \times 17}{15} = 13{,}6$$

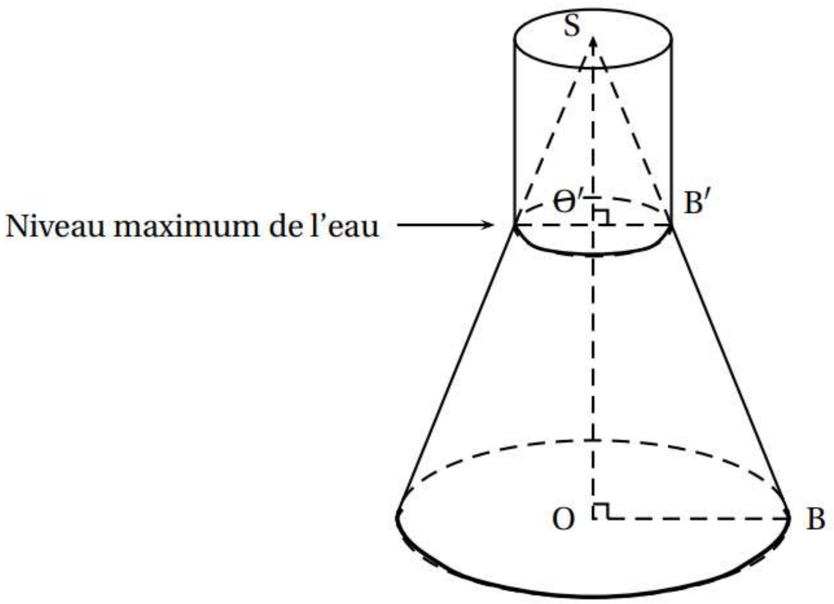
On a ainsi : $\boxed{SF = 13{,}6 \text{ cm}}$.



Exercice 3 : Un pot de fleur a la forme d'un tronc de cône.
La mesure du disque de base est $OA = 20$ cm.
On a $SO = 60$ cm et $SO' = 30$ cm.

1. Déterminer la mesure de $O'A'$.
2. Déterminer le volume du cône.
3. En déduire le volume du pot de fleur.

Exercice 4 : En travaux pratiques de chimie, les élèves utilisent des récipents, appelés erlenmeyers, comme celui schématisé ci-dessous.



Le récipient est rempli d'eau jusqu'au maximum indiqué sur le schéma par une flèche.
On note :
C_1 le grand cône de sommet S et de base le disque de centre O et de rayon OB.
C_2 le petit cône de sommet S et de base le disque de centre O' et dez rayon O'B'.
On donne : $SO = 12$ cm et $OB = 4$ cm.

1. Calculer la valeur exacte du volume du cône C_1.
2. Le cône C_2 est une réduction du cône C_1. On donne $SO' = 3$ cm.
    a. Quel est le coefficient de cette réduction ?
    b. Prouver que la valeur exacte du volume du cône C_2 est égale à π cm^3.
3.
    a. En déduire que la valeur exacte du volume d'eau contenue dans le récipient, en cm^3, est 63π.
    b. Donner une valeur approchée de ce volume d'eau arrondi au cm^3 près.
4. Ce volulme d'eau est-il supérieur à 0,2 litres ? Expliquer pourquoi.