Probabilités

1. Calcul de probabilités

Une **issue** est un résultat possible lors d'une expérience aléatoire

Un **évènement** est une condition qui peut être réalisée par une ou plusieurs issues

Exemple : une urne contient des boules indiscernables au toucher :

- Six blanches, numérotées de 1 à 6
- Huit noires, numérotées de 1 à 8
- Dix grises, numérotées de 1 à 10

On considère les évènements A et B suivants :

- A : « la boule tirée est blanche »
- B : « la boule tirée est noires et porte un numéro pair »

Il y a en tout 24 boules dans cette urne, donc 25 issues.

La probabilité de l'évènement A est donc

$$p(A) = \frac{6}{24} = \frac{6\times1}{6\times4} = \frac{1}{4}$$

La probabilité de l'évènement B est

$$p(B) = \frac{4}{24} = \frac{4\times1}{4\times6} = \frac{1}{6}$$

On dit qu'il y a **équiprobabilité** si toutes les issues ont la même probabilité d'être obtenues.
La probabilité d'un évènement A est alors :

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{nombre\ d'issues favoables\ à\ A}{nombre\ total\ d'issues}}$$

Exercice 1 : Dans une loterie, une roue est divisée en secteurs de même taille : neuf de ces secteurs permettent de gagner 5 €, six permettent de gagner 10 €, trois permettent de gagner 50 €, deux permettent de gagner 100 € et quatre ne font rien gagner.
On fait tourner la roue, elle s'immobilise et on observe le gain.

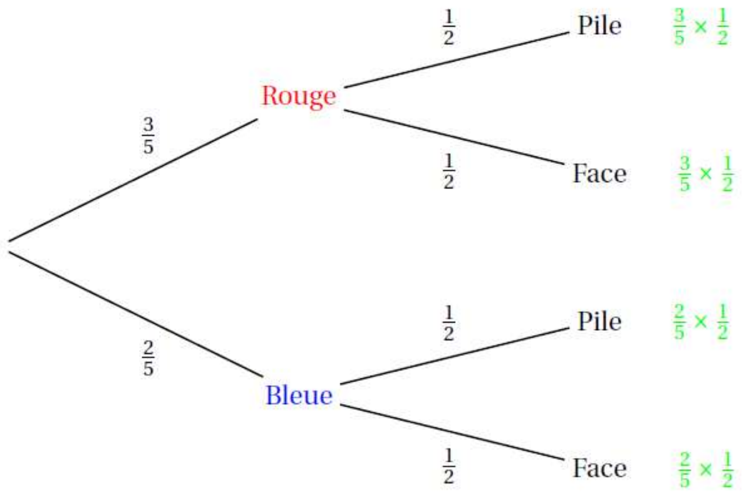
On considère les évènements suivants :

- A : « on ne gagne rien »
- B : « on gagne au moins de 50 € »

1. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
2. Quelles sont les issues réalisant l'évènement B ?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement B ?

2. Arbre de probabilité

Exemple : Un jeu consiste à tirer une boule dans un sac contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues, puis à lancer une pièce de monnaie bien équilibrée. Construisons un arbre de probabilité représentant cette expérience.



Lorsqu'une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes, on se sert d'un arbre pondéré pour la représenter

- La probabilité d'obtenir une boule rouge, puis de faire face est :

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3\times 1}{5\times 2} = \frac{3}{10}$$

Pour calculer la probabilité d'une issue, on **multiplie** les probabilités des branches qui mènent à cette issue

- Cherchons la probabilité de faire face.
Deux chemins sont possibles : obtenir une boule rouge puis faire face ou obtenir une boule bleue puis faire face.

Si plusieurs chemins mènent à une issue, on calcule séparément la probabilité de chacun des chemins puis on **ajoute** ces résultats

La probabilité d'obtenir une boule rouge et de faire face est $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

La probabilité d'obtenir une boule bleue et de faire face est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.

Ainsi la probabilité de faire face est $\frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1\times 2}{5\times 2} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3+2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : On dispose de deux boîtes. La première contient 3 billets de 5 € et 1 billet de 10 €. La seconde contient 1 billet de 5 € et 1 billet de 10 €.
Une expérience consiste à choisir au hasard une boîte, puis à prendre au hasard un billet dans cette boîte.

1. Dessiner un arbre pondéré représentant cette expérience.
2.
    a. Quelle est la probabilité de choisir la première boîte et de prendre dedans un billet de 5 € ?
    b. Quelle est la probabilité de choisir la deuxième boîte et de prendre dedans un billet de 5 € ?
    c. En déduire la probabilité d'obtenir un billet de 5 €, puis celle d'obtenir un billet de 10 €.